Intangible Capital
© Intangible Capital - Nº 3 - Vol. 0, Septiembre de 2004 - ISSN: 1697-9818 (Cod:0022)

Reparto de los ahorros de la gestión conjunta de stocks

Antonio Magaña Nieto
Manel Rajadell Carreras

Profesores de la Universitat Politécnica de Catalunya

En este trabajo se prueba que la gestión conjunta de stocks se traduce en un beneficio para las compañías que deciden cooperar, incluso cuando sus demandas son diferentes. Sin embargo, en este caso, surge un problema: ¿cómo compartir los costes asociados (o los ahorros, dependiendo del punto de vista usado) que la gestión conjunta de stocks genera? Se discute la tradicional fórmula del reparto proporcional y se muestran sus desventajas; utilizando los juegos cooperativos y el valor de Shapley se presenta una solución satisfactoria a este problema.

Palabras Clave: gestión de stocks, juegos cooperativos, análisis de la decisión, valor de Shapley.

Área de especialización: Análisis de la Decisión

1. Introducción

La gestión de stocks es una de las actividades esenciales de muchas empresas. Los stocks resultan imprescindibles para proporcionar un buen servicio al cliente y, por tanto, es necesario y útil realizar alguna inversión en stocks. Sin embargo, también es cierto que unos stocks excesivos son perjudiciales para la empresa, que podría dedicar el dinero invertido en ellos a modernizar sus instalaciones, a desarrollar nuevos productos, a pagar dividendos a sus accionistas o a cualquier otra necesidad de capital que deba afrontar.

Además del capital inmovilizado en las materias almacenadas, cada decisión referente a la cantidad de stocks que se debe mantener produce una serie de costos asociados; por ejemplo, los costes relacionados con la adquisición y almacenamiento de materiales. Una óptima gestión de los stocks comprende el conjunto de decisiones y operaciones encaminadas a minimizar los costes asociados (sin rebajar el nivel de servicio ofrecido a los clientes).

Uno de los modelos básicos y más sencillos de gestión de stocks da lugar a la fórmula del lote económico de Harris—Wilson, que puede encontrase en cualquier manual de Dirección de Operaciones. En dicho modelo se formulan las siguientes hipótesis:

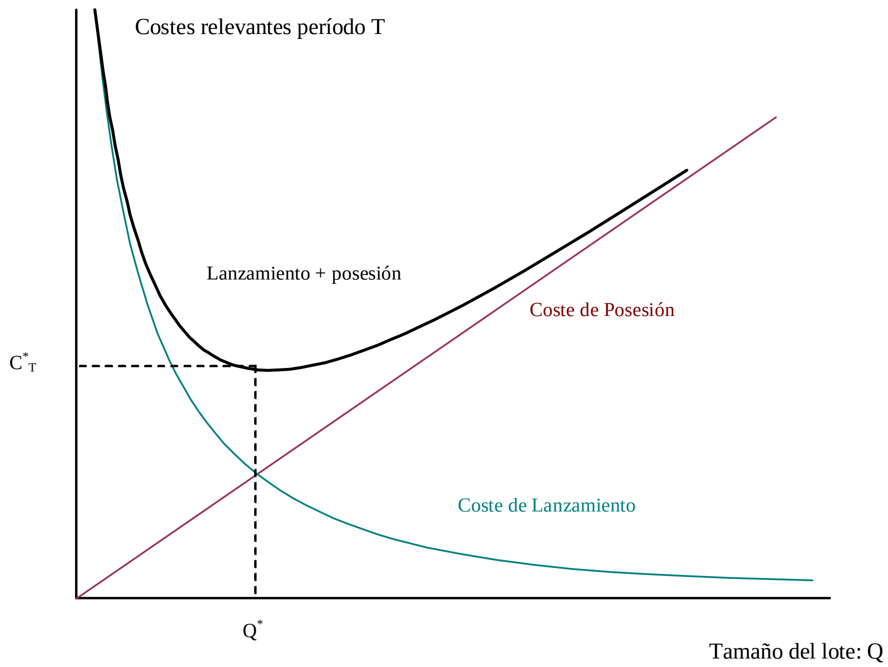
a) La demanda es constante, perfectamente conocida y homogénea en el tiempo estudiado.
b) El plazo de entrega o *lead time* es constante y conocido
c) En cada ciclo se consume totalmente el stock, sin producirse ruptura del mismo.
d) Las entradas de materiales se efectúan en bloque, dando lugar a un modelo en forma de diente de sierra en un gráfico tiempo/stock.
e) Todos los costes que intervienen son constantes y conocidos.

El punto e) merece una atención especial porque exige la determinación de los costes asociados a la gestión de existencias. En el modelo intervienen únicamente dos tipos de costes: los de mantenimiento del stock y los de lanzamiento de la orden de compra o producción. El coste de mantenimiento, también llamado de posesión, es una función del volumen medio almacenado y depende del coste de oportunidad del capital invertido en las existencias, de la posible depreciación u obsolescencia de los materiales y de los gastos derivados del almacenamiento (alquileres, seguros, suministros energéticos, etc.). Su expresión matemática es:

$$C_m = C_A \frac{q}{2} t$$

donde C_A es el coste por unidad de mercancía y por unidad de tiempo *t* y el cociente $q/2$ es el stock medio almacenado. Para el cálculo de C_A se considerará el coste de oportunidad del capital inmovilizado y los gastos de mantenimiento del stock. Por su parte, el coste de pedido, C_P, decrece con el volumen medio almacenado, es decir al hacer pedidos mayores y menos frecuentes. Su cálculo no es fácil porque exige la contabilización de costes de transporte, logísticos y administrativos diversos (facturas, albaranes, llamadas telefónicas, personal del departamento de compras, etc.).

El coste total vendrá dado por la suma de los dos costes anteriores: $C_T = C_m + C_P$. Su representación gráfica se presenta en la Figura 1.



[FIGURA 1]

Evidentemente, interesa determinar el tamaño del lote económico que minimiza los costes totales. En otras palabras, el objetivo es disponer de unas existencias de *D* unidades en un período de tiempo *T*, realizando *N* aprovisionamientos de *q* unidades cada uno, siempre con el mínimo coste.

En estas condiciones se trata de hallar la *q* óptima económicamente, que designaremos por Q^*, minimizando la expresión del coste total. Para un ciclo de tiempo *t* se tiene:

$$(C_T)_t = C_m + C_P = C_A\left(\frac{q}{2}\right)t + C_P = C_A\left(\frac{q}{2}\right)\left(\frac{T*q}{D}\right) + C_P$$

y para *N* ciclos:

$$C_T = \left[C_A\left(\frac{q}{2}\right)\left(\frac{T*q}{D}\right) + C_P\right]\left(\frac{D}{q}\right) = \frac{C_A*T*q}{2} + \frac{C_P*D}{q}$$

A partir de esta expresión se determina el número mínimo de la curva de coste, obteniéndose el tamaño óptimo del lote económico de pedido o compra:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2*D*C_P}{C_A*T}}$$

En los libros de texto se pueden ver generalizaciones del modelo de Harris—Wilson que permiten aplicarlo en otras situaciones. Por ejemplo, cuando los costes variables de adquisición dependen del volumen de ventas, es decir considerando rebajas graduales o *rappels* en función de unos determinados rangos de volúmenes de compra; o cuando es posible considerar una demanda insatisfecha diferida que obliga a introducir una modificación en el coste anual de mantenimiento (la variación del nivel de stock medio es diferente y, además, a la función de coste global se debe añadir el término correspondiente al coste de diferir la demanda).

© Intangible Capital - Nº 3 - Vol. 0, Septiembre de 2004 - ISSN: 1697-9818 (Cod:0022)

2. Alianzas estratégicas en la gestión de stocks

Una alianza entre dos o más empresas es una colaboración para llevar a cabo un plan de acción común que va más allá de una relación de “mercado” entre ellas, pero sin perder su propia personalidad jurídica. Además, el establecimiento de un acuerdo de colaboración no implica aportaciones de capital. Por todo esto, la cooperación, en sentido amplio, puede adoptar formas muy diversas, tanto desde el punto de vista jurídico como económico. Desde la perspectiva legal puede consistir en acuerdos informales, contratos a largo plazo, consorcios o empresas conjuntas (*joint ventures*).

Dada la diversidad de opciones posibles, un acuerdo de cooperación presenta, como mínimo, las siguientes características:

a) Las empresas que se unen para alcanzar una serie de objetivos acordados siguen siendo independientes tras la formación de la alianza, de manera que no se modifican los poderes centrales autónomos de cada empresa.
b) Las empresas participantes comparten los beneficios de la alianza y controlan los resultados de las tareas asignadas. Tal vez esta es la característica que más distingue a las alianzas y la que hace que resulten más difíciles de gestionar.
c) Cada socio debe percibir que se posibilita la realización de economías de suma positiva con el acuerdo de cooperación.

Muchos autores, cuando analizan el modelo de Harris—Wilson, aconsejan compartir stocks como base para la reducción de los costes asociados a su gestión y esto, requiere un acuerdo de cooperación. Pero, ¿realmente se consigue un ahorro creando una alianza estratégica para compartir las existencias?

Generalmente, se estudia el caso de dos comerciantes, A y B, que tienen la misma demanda, *D*, e idénticos costes de mantenimiento y pedido, C_m y C_P. Si los dos optimizan los costes de gestión de inventario, entonces cada uno de ellos tendrá un coste igual a K^*. Considerando, por ejemplo, un período *T* de un año, el coste total K^*, expresado en unidades monetarias, para cada uno de los comerciantes será:

$$K^* = K_m + K_P = \frac{C_A\, Q^*}{2} + \frac{C_P\, D}{Q^*}$$

Al sustituir Q^* de la expresión anterior tenemos:

$$K^* = \sqrt{2\, C_A\, C_P\, D}$$

Si cada comerciante actúa separadamente, entonces los costes globales serán:

$$K_{A+B}{}^* = K_A^* + K_B^* = 2 * \sqrt{2\, C_A\, C_P\, D}$$

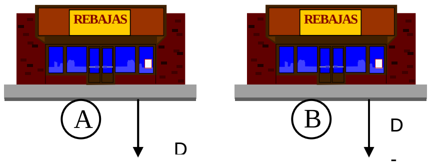
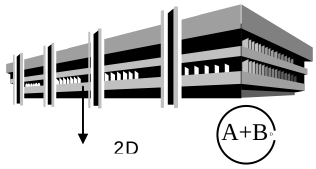
Sin embargo, si deciden establecer una alianza estratégica para aprovisionarse con un stock mínimo, la demanda conjunta para el período considerado es *2D* y, por tanto, el coste total es:

$$K_{AB}^* = \sqrt{2 C_A\, C_P\, (2D)} = \sqrt{2}\left(K^*\right)$$

La alianza supone un ahorro global, medido en unidades monetarias por período, que viene dado por la expresión siguiente:

$$Ahorro = K_{A+B}^* - K_{AB}^* = \left(2 - \sqrt{2}\right) \sqrt{2 C_A\, C_P\, D}$$

En la Figura 2 se resume el conjunto de parámetros y valores óptimos para cada una de las dos situaciones planteadas anteriormente: la comparación entre demandas, el tamaño de los lotes económicos y la media de stocks. Los costes globales ponen de manifiesto las ventajas que la gestión conjunta ofrece comparada con la gestión individual.

	Gestión separada	Gestión conjunta
Demanda		
Lote económico:	$Q_A^* = Q_B^* = Q^* = \sqrt{\frac{2\,D\,C_P}{C_A}}$	$Q_{A*B}^* = \sqrt{\frac{2\,C_P\;2\,D}{C_A}} = \sqrt{2}\left(Q^*\right)$
Stock medio:	$\frac{Q^*}{2} + \frac{Q^*}{2} = Q^*$	$\frac{\sqrt{2}}{2}Q^*$
Coste global	$K_{A+B}^* = 2\sqrt{2\,C_P\,C_A\,D}$	$K_{AB}^* = \sqrt{2}\sqrt{2\,C_P\,C_A\,D}$

[Figura 2]

En general, si a una demanda D corresponde un coste K, una demanda n D estará asociada a un coste $\sqrt{n}\,K$ siempre que el resto de parámetros se mantengan constantes. Es lógico preguntarse si también se obtendrán beneficios de la gestión conjunta de stocks cuando las empresas tienen necesidades diferentes y, en caso de que la respuesta sea afirmativa, cuantificar el ahorro que se consigue.

Para responder a estas cuestiones, imaginemos que hay *n* empresas con demandas respectivas $D_1, D_2, \ldots, D_n$ no necesariamente iguales. Supongamos que C_A y C_P son las mismas para todas las empresas. Entonces, la suma de los costes individuales será:

$$K_T^* = \sum_{i=1}^{n} K_i^* = \sqrt{2C_A C_P} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{D_i}\,.$$

Gestionando conjuntamente los stocks, el coste global es:

$$K_C^* = \sqrt{2C_A C_P \sum_{i=1}^{n} D_i}$$

Para ver que $K_T^* > K_C^*$ basta con elevar ambos términos al cuadrado:

$$\left(K_T^*\right)^2 = 2C_A C_P \left(\sum_{i=1}^{n} D_i + 2\sum_{i<j} \sqrt{D_i D_j} \right) \quad \text{y} \quad \left(K_C^*\right)^2 = 2C_A C_P \sum_{i=1}^{n} D_i$$

El ahorro conseguido es:

$$K_T^* - K_C^* = \sqrt{2C_A C_P} \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{D_i} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_i} \right)$$

Desde el punto de vista económico y financiero, el ahorro conseguido a partir de la gestión conjunta de stocks incide en una mejora de la Cuenta de Resultados de las empresas participantes (tengan o no demandas iguales), como consecuencia directa de la disminución de los gastos. Surge entonces un nuevo problema: ¿cómo repartir, entre las empresas que integran una alianza, los pagos correspondientes a los gastos derivados de una gestión conjunta de stocks? Si la cuestión se plantea en términos de ahorro, la pregunta clave es ¿cómo repartir estos hipotéticos ahorros obtenidos mediante la gestión conjunta de stocks?

Se podría pensar en un ingreso en una cuenta corriente, por el valor de lo que tocaría pagar si no se llevase a cabo el acuerdo de cooperación. Los pagos correspondientes a los aprovisionamientos propios de la gestión de stocks, se efectúan mediante cargos a dicha cuenta. Al finalizar el ejercicio considerado, queda un remanente susceptible de ser repartido entre las empresas participantes en la alianza. Este problema es nuevo, porque en el modelo clásico todas las empresas tienen igual demanda, y obviamente, el reparto sólo admite la fórmula equitativa.

Dado que los socios de una alianza disponen de la libertad necesaria para definir su ámbito y contenido, se trata de un fenómeno esencialmente contractual. Precisamente, por tratarse de un contrato, convendrá determinar la manera de realizar, de una manera justa, el reparto de los costes de la gestión conjunta de los stocks, o del "ahorro" generado, entre los socios miembros de la alianza.

Para clarificar la exposición, se presenta un supuesto práctico con cuatro empresas. Las demandas para un determinado período son, respectivamente, de 900, 800, 750 y 600 unidades y se pueden considerar homogéneas en el tiempo. Los costes de lanzamiento de una orden de compra son 50.000 u.m./pedido. Los costes de posesión son de 2.000 u.m. por unidad y período ya que se cuantifica la obsolescencia del material.

Empresa	Demanda (Ud.)	Costes de gestión separada (u.m.)	Stock medio $Q^*/2$
1	900	424.264,07	106
2	800	400.000,00	100
3	750	387.298,33	97
4	600	346.410,16	87
TOTAL	3.050	1.557.972,57	390

Tabla 1. Datos de la gestión de stocks independiente.

Si las cuatro empresas deciden constituir un centro logístico común, la demanda conjunta por período es de 3.050 unidades y el coste total será de 781.024,97 u.m. Este almacén central, consecuencia de un acuerdo de colaboración entre las empresas, supone un ahorro global por período de 776.947,60 u.m. Otra particularidad es la reducción de número medio de unidades en stock. Cuando actúan de manera independiente, el stock medio es de 390 unidades, mientras que con una política de gestión conjunta es de 195 unidades. El nivel medio del stock se reduce a la mitad.

3. Perspectiva tradicional: reparto proporcional

Es usual pensar que la mejor respuesta a la cuestión planteada en el apartado anterior consiste en establecer un reparto proporcional, respecto al volumen de los pedidos individuales. Si bien esta solución se utiliza de forma habitual, presenta serios inconvenientes (véase ref. [AM--MR]). Pongamos de manifiesto al menos dos de ellos.

Por un lado, el reparto proporcional no es aditivo. Veamos qué significa esto utilizando el ejemplo anterior. En la Tabla 2 se describe el reparto proporcional de los costes de gestión conjuntos respecto a las demandas individuales y el “ahorro” que esto supone para las empresas comparándolo con las cantidades que deberían desembolsar si los gestionan individualmente.

Empresa	Demanda (Ud.)	Costes de gestión separada	Reparto proporcional de los costes	Diferencia (“Ahorro”)
1	900	424.264,07	230.466,38	193.797,68
2	800	400.000,00	204.859,01	195.140,99
3	750	387.298,33	192.055,32	195.243,01
4	600	346.410,16	153.644,26	192.765,91
TOTAL	3.050	1.557.972,56	781.024,97	776.947,60

Tabla 2. Reparto proporcional de los costes.

Analicemos ahora la forma alternativa de efectuar los pagos que proponíamos más arriba: cada empresa ingresa en una cierta cuenta la cantidad que le correspondería pagar individualmente, realizan el pago conjunto y se reparten después el remanente (las 776.947,60 u. m.) de manera proporcional. Es razonable pensar que las empresas deberían mostrarse indiferentes, al menos teóricamente, entre estas dos formas de proceder. Sin embargo, como se muestra en la Tabla 3, las cantidades resultantes del reparto proporcional del remanente no coinciden con las cantidades que se ahorran las empresas si proceden de la primera manera.

Empresa	Demanda (Ud.)	Reparto proporcional del remanente
1	900	229.263,23
2	800	203.789,53
3	750	191.052,69
4	600	152.842,15
TOTAL	3.050	776.947,60

Tabla 3. Reparto proporcional del remanente.

Haciendo estos cálculos sencillos es evidente que la primera y la segunda empresa prefieren repartir el remanente que repartir los costes y, sin embargo, la tercera y la cuarta escogen la opción contraria. Difícilmente llegarán a un acuerdo en la manera de proceder.

El segundo inconveniente del reparto proporcional es que en él, sólo intervienen las cantidades que pagarían las empresas si actúan individualmente y la cantidad que pagarán si actúan de forma conjunta. No tiene en cuenta las *contribuciones marginales* de cada empresa a las posibles coaliciones que se pueden formar. Existen otras maneras de realizar el reparto evitando los defectos de la proporcionalidad. Veamos una de ellas importada de la Teoría de Juegos.

4. Juegos cooperativos y valor de Shapley

Los juegos cooperativos sirven como modelos matemáticos para ciertas situaciones de cooperación y competencia en las cuales los agentes que intervienen tienen la posibilidad de comunicarse entre ellos con el fin de negociar y llegar a acuerdos que permitan la formación de coaliciones. La gestión conjunta de stocks es una de esas situaciones.

En un juego cooperativo es necesario conocer el pago que debe realizar cada una de todas las posibles coaliciones que pueden formar los agentes.

En el caso que nos ocupa, describiremos el juego cooperativo mediante una función *C* que asignará a cada coalición de las cuatro empresas el coste de la gestión conjunta de los stocks de esa coalición de empresas. Concretamente:

C(1) = 424.264,07	C(13) = 574.456,26	C(123) = 700.000,00
C(2) = 400.000,00	C(14) = 547.722,56	C(124) = 678.233,00
C(3) = 387.298,33	C(23) = 556.776,44	C(134) = 670.820,39
C(4) = 346.410,16	C(24) = 529.150,26	C(234) = 655.743,85
C(5) = 583.095,19	C(34) = 519.615,24	C(1234) = 781.024,97

Tabla 4. Función característica para los costes *C*.

Los costes *C(1)*, *C(2)*, *C(3)* y *C(4)* corresponden a los costes individuales de las empresas y C(1234) al coste conjunto (si llegan a formalizar la alianza). Para calcular las otras cantidades hemos usado las fórmulas que vimos en la segunda sección, aplicándolas a dos empresas o a tres. También podemos usar un juego cooperativo para describir la situación de ahorro:

B(1) = 0	B(13) = 237.106,14	B(123) = 511.562,40
B(2) = 0	B(14) = 222.951,67	B(124) = 492.441,23
B(3) = 0	B(23) = 230.521,90	B(134) = 487.152,17
B(4) = 0	B(24) = 217.259,90	B(234) = 477.964,64
B(5) = 241.168,88	B(34) = 214.093,25	B(1234) = 776.947,60

Tabla 5. Función característica para los ahorros *B*.

La función B asigna a cada coalición de empresas el ahorro que le supone la gestión conjunta de los stocks como la diferencia entre la suma de las cantidades que deberían desembolsar individualmente y la cantidad que pagarán si los gestionan conjuntamente:

$$B(S) = \left(\sum_{i \in S} C(i) \right) - C(S)$$

Un concepto de solución para un juego cooperativo es una regla para repartir la cantidad que pagará (o que se ahorrará) la coalición total si llega a formarse. Existen multitud de soluciones para los juegos cooperativos (la proporcionalidad es una de ellas, el reparto equitativo es otra, el reparto en el que todo lo paga la primera empresa es otra...). Es obvio, que estos dos últimos ejemplos de reglas de reparto no son "justas", en el sentido de que alguna o algunas de las empresas tendrían razones *objetivas* para no estar de acuerdo con este proceder. También hemos visto que la proporcionalidad presenta inconvenientes. La teoría de juegos nos da una solución justa sin los defectos de la proporcionalidad: el valor de Shapley.

Se puede demostrar (aunque la demostración alargaría y complicaría en exceso este trabajo) que el valor de Shapley es la única regla de reparto para los juegos cooperativos que satisface las tres propiedades siguientes:

1. Si en un mismo pedido dos empresas hacen idénticas demandas, entonces les corresponde pagar la misma cantidad (u obtienen el mismo ahorro).
2. Si una empresa no interviene en un pedido, no debe desembolsar nada en ese pedido (tampoco obtiene ningún ahorro).
3. La cantidad que corresponde a cada empresa del reparto de los costes conjuntos más la que le corresponde del reparto de los ahorros coincide con la cantidad individual que tenía que pagar individualmente.

La tercera propiedad nos dice que el valor de Shapley es aditivo y, por tanto, no tiene el inconveniente que hemos visto para la proporcionalidad. De hecho, esta tercera propiedad admite un enunciado diferente: si se acumulan las cantidades a pagar en dos pedidos en una sola factura y se reparte después entre los socios, la cantidad resultante para cada empresa coincide con la suma de los pagos correspondientes a cada pedido. (Evidentemente, esta propiedad tampoco la cumple la regla de reparto proporcional.)

Para una empresa fijada *i*, su valor de Shapley en el juego cooperativo con función característica *C* se calcula de la manera siguiente: para cada coalición S que contiene a dicha empresa se considera la diferencia

$$C(S) - C(S / \{i\})$$

que representa la *contribución marginal* de la empresa *i* a la coalición *S*, y después se hace la suma de todas las contribuciones marginales de *i* ponderadas según unos ciertos coeficientes:

$$\Phi_i\,[C] = \sum_{S \ni i} \frac{(n-s)!\,(s-1)!}{n!}\,[C(S) - C(S/\{i\})]$$

donde $\Phi_i\,[C]$ representa el pago (o ahorro, dependiendo de la función característica) que el valor de Shapley asigna a la empresa *i*-ésima, *n* es el número total de empresas que intervienen en la gestión de los stocks, *s* es el cardinal (número de empresas) de la coalición *S*, y la suma es respecto a todas las coaliciones que contienen a *i*.

En la Tabla 6 se presentan el reparto de los costes y el de los ahorros aplicando el valor de Shapley, y se observa que la suma de ambos concuerda con los costes individuales para las empresas.

Empresa	Demanda	$\Phi_i\,[C]$	$\Phi_i\,[B]$	$\Phi_i\,[C] + \Phi_i\,[B]$
1	900	221.976,04	202.288,03	424.264,07
2	800	202.820,49	197.179,51	400.000,00
3	750	193.086,74	194.211,60	387.298,34
4	600	163.141,70	183.268,46	346.410,16
5	3.050	781.084,97	776.947,60	

Tabla 6. Reparto según el valor de Shapley.

© Intangible Capital - Nº 3 - Vol. 0, Septiembre de 2004 - ISSN: 1697-9818 (Cod:0022)

Por supuesto, deben ser las propiedades de las diferentes maneras de repartir las que nos hagan decantar por una manera u otra y no las cantidades concretas que se obtengan cuando se aplican a casos concretos. Es decir, comparando los resultados de las Tablas, la primera empresa prefiere aplicar el valor de Shapley y el reparto proporcional la cuarta. Sin embargo, pensamos que la elección de una regla justa de reparto no debe estar sujeta a casos particulares, sino a las propiedades que cumpla la regla. Hemos visto que el reparto proporcional adolece de una serie de inconvenientes que no presenta el valor de Shapley.

5. Conclusiones

La teoría de juegos también nos permite estudiar situaciones en las cuales grupos de empresas con demandas no necesariamente iguales establecen un acuerdo de cooperación o alianza estratégica para gestionar conjuntamente sus stocks. Entonces, surge el problema de cómo repartir los costes o ahorros entre socios. El valor de Shapley y su modificación coalicional dan respuesta a esta cuestión.

6. Bibliografía / Referencias

Cuatrecasas, L. (1998), "Gestión competitiva de stocks y procesos de producción". Ediciones Gestión 2000, S.A.

Magaña, A., Rajadell, M. (1997), "Contribuciones y participaciones de socios en cooperaciones interempresariales". Boletín de estudios económicos. Universidad Comercial de Deusto. Núm. 162, vol. LII, pág. 575 – 586. Bilbao.

Plossl, G. W., Wight, O. W. (1979), "El control de la producción y los stocks". Ediciones Universidad de Navarra, Pamplona.

© Intangible Capital - Nº 3 - Vol. 0, Septiembre de 2004 - ISSN: 1697-9818 (Cod:0022)

Shapley, L. S. (1953), A value for n person games. En: Contributions to the theory of games II, editado por Kuhn, H. W. y Tucker, A. W. Princeton University Press, pág. 307 – 317. Princeton.